1º recupero di Analisi II (primi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica – Soluzioni
28–11–05

Esercizio 1.
La procedura è la solita. La parametrizzazione della curva è $x(t) = t$, $y(t) = at + b$ per $a' \le t \le b'$. Si ha $m = \int_{a'}^{b'} dt\delta(|t| + |at + b|)\sqrt{1 + a^2}$ e il risultato è $\delta\frac{87}{2}\sqrt{2}$ per A e C; $\delta 60\sqrt{2}$. per B e D.

Ovviamente bisognava tenere conto della presenza di due moduli.
A: $y(t) = t - 3$, $\quad -1 \le t \le 4$ e quindi $m = \int_{-1}^{0}((-t) - (t-3))dt + \int_{0}^{3}(t - (t-3))dt + \int_{3}^{4}(t + t - 3)dt$
B: $y(t) = t - 4$, $\quad -1 \le t \le 5$ e quindi $m = \int_{-1}^{0}((-t) - (t-4))dt + \int_{0}^{4}(t - (t-4))dt + \int_{4}^{5}(t + t - 5)dt$
C: $y(t) = t + 3$, $\quad -4 \le t \le 1$ e quindi $m = \int_{-4}^{-3}((-t) - (t+3))dt + \int_{-3}^{0}(-t + (t+3))dt + \int_{0}^{1}(t + t + 3)dt$
C: $y(t) = t + 4$, $\quad -5 \le t \le 1$ e quindi $m = \int_{-5}^{-4}((-t) - (t+4))dt + \int_{-4}^{0}(-t + (t+4))dt + \int_{0}^{1}(t + t + 4)dt$

Esercizio 2.
In tutti e quattro i casi si tratta di un parabolide ellittico $z = -ax^2 - by^2$ rivolto verso il basso e passante per l'origine. Il paraboloide è tagliato SOLO DAL piano, detto P, di equazione $z = cx + dy + e^{(1.1)}$ e la proiezione sul piano x, y dell'intersezione è una ellisse, detta E, la cui equazione è $\frac{(x-h)^2}{f^2} + \frac{(y-k)^2}{g^2} = 1$ e $h = \frac{c}{2a}$ $k = \frac{d}{2b}$ $f = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{c^2}{4a} + \frac{d^2}{4b} - e}$ $g = \frac{1}{\sqrt{b}}\sqrt{\frac{c^2}{4a} + \frac{d^2}{4b} - e}$
Sia $\int\int_S (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^e)d\sigma$ l'integrale cercato. Detto $\underline{F}(\underline{x})$ il campo vettoriale che è della forma $\underline{F}(\underline{x}) = a'x + b'x + (z - dy - e)$ ed usando il teorema della divergenza si ha $\int\int_S (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^e)d\sigma = \int\int\int_V div\underline{F}(\underline{x})dxdydz - \int\int_P (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^e)d\sigma$. Il campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x})$ è tangente al piano P e quindi rimane l'integrale della divergenza che è pari a $\int\int_{\frac{(x-h)^2}{f^2} + \frac{(y-k)^2}{g^2} \le 1} \int_{cx+dy+e}^{-ax^2-by^2} dz(a'+1) = (a'+1)\int\int_{\frac{(x-h)^2}{f^2} + \frac{(y-k)^2}{g^2} \le 1}(-ax^2 - by^2 - cx - dy - e)$

Cambiando variabili si ottiene
$(a'+1)\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 d\rho\, \rho f g(1 - \rho^2)$ e il risultato è $A : \frac{3}{8}\pi$, $B : \frac{3}{16}\pi$, $C : -\frac{\pi}{6}$, $D : -\frac{\pi}{3}$
Le ellissi nei quattro casi sono $A : (x+1)^2 + 4(y+1)^2 = 1$, $B : 4(x+1)^2 + 9(y+1)^2 = 1$, $C : (x+1)^2 + 9(y+1)^2 = 1$, $D : 4(x+1)^2 + 16(y+1)^2 = 1$.

Più di uno studente dubitava del fatto che il piano P e il parabolide si intersecassero. Ovviamente la soluzione del sistema che vede l'ellisse come soluzione elimina ogni dubbio.

Problema n.3

1.1) In tutti i casi abbiamo $f(x) = (ax + b)^2 + c$ con $x \in [0, L]$. La funzione dispari cercata è $F(x) = \begin{cases} (ax+b)^2 + c & 0 \le x \le L \\ -(-ax+b)^2 - c & -L \le x \le 0 \end{cases}$ ($x = 0$ non è presente nella parte inferiore se $f(0) \ne 0$) e la periodica è $F(x - 2Lk)$ se $-L + 2kL \le x \le L + 2kL$. La serie di Fourier è $\sum_{k=1}^{+\infty} \sin(x\frac{\pi k}{L})q_k$ dove $q_k = \frac{2}{L}\int_{-L}^{L} dx \sin(x\frac{k\pi}{L})F(x) = \frac{4}{L}\int_0^L dx \sin(x\frac{k\pi}{L})f(x)$ e si ottiene
$A : -\frac{2}{(k\pi)^3}\left(18 - (k\pi)^2 + (-)^k(4\pi^2k^2 - 18)\right)$,

(1.1) il piano z=0 *non taglia il paraboloide* (se non nell'origine) e quindi non entra nel calcolo del flusso. Serve solo a definire la porzione di superficie interessata. Per avere un quadro chiaro della situazione bisognava fare un disegno, ancorché approssimato.

$$B : -\frac{2}{(k\pi)^3}\big(32 - 3(k\pi)^2 + (-)^k(11\pi^2k^2 - 32)\big),$$
$$C : -\frac{4}{(k\pi)^3}\big(16 - (k\pi)^2 + (-)^k(5\pi^2k^2 - 16)\big),$$
$$D : -\frac{2}{(k\pi)^3}\big(18 - 4(k\pi)^2 + (-)^k(\pi^2k^2 - 18)\big)$$

Essendo la funzione $F(x)$ discontinua in almeno un punto, ad esempio l'origine, la serie non può convergere uniformemente su tutta la retta. I punti di discontinuità della $F(x)$ in realtà sono infiniti. Sono tutti i punti di coordinate $x = kL$ con k intero. Gli insiemi in cui la serie converge unif0rmemente sono, ad esempio, tutti gli intervalli che non contengono al loro interno alcun punto di discontinuità . Si badi però che nell'insieme $[\varepsilon, L-\varepsilon] \cup \{0\}$ con $0 < \varepsilon < \frac{L}{2}$ la *convergenza è uniforme* in quanto in tale insieme $F'(x)$ è continua.

La convergenza nell'insieme $E = \{-3, 0, 3\}$ è uniforme.

SCRIVERE PER I COEFFICIENTI DI FOURIER LA FORMULA $q_k = \frac{2}{L}\int_{-L}^{L} dx \sin(x\frac{k\pi}{L})((ax+b)^2+c)$ è un grave errore. Scrivere la formula precedente e poi scrivere che è uguale a $q_k = \frac{4}{L}\int_0^L dx \sin(x\frac{k\pi}{L})((ax+b)^2+c)$ comporta un secondo errore poiché le due formule NON SONO uguali anche se l'ultimo integrale dà il risultato giusto. Tali considerazioni valgono tutte le volte che si devono trovare coefficienti di Fourier di funzioni pari oppure dispari.

Problema n.3

1.2) In tutti i casi abbiamo $f(x) = (ax+b)^2 + c$ con $x \in [0, L]$ E INOLTRE $f(-x) = f(x+L)$ (in quanto $b = \frac{L}{2}$). Ciò implica che il periodo minimo della funzione è L e non 2L. La funzione pari cercata è $F(x) = \begin{cases} (ax+b)^2 + c & 0 \le x \le \dfrac{L}{2} \\ (-ax+b)^2 + c & -\dfrac{L}{2} \le x \le 0 \end{cases}$ e la periodica è $F(x - Lk)$ se $-L + kL \le x \le L + kL$. La serie di Fourier è $\sum_{k=1}^{+\infty} \cos(x\frac{2\pi k}{L})q_k$ dove $q_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \cos(x\frac{2k\pi}{L})F(x) = \frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} dx \cos(x\frac{2k\pi}{L})f(x)$ e si ottiene

$$A : \frac{4}{(2k\pi)^2} \text{ da cui la serie è } \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(\pi k)^2}\cos k\pi x$$

$$B : \frac{16}{(2k\pi)^2} \text{ da cui la serie è } \frac{8}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{16}{(\pi k)^2}\cos \frac{k}{2}\pi x$$

$$C : \frac{16}{(2k\pi)^2} \text{ da cui la serie è } \frac{20}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{16}{(\pi k)^2}\cos \frac{k}{2}\pi x$$

$$D : \frac{4}{(2k\pi)^2} \text{ da cui la serie è } \frac{14}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(\pi k)^2}\cos k\pi x$$

Le serie convergono tutte uniformemente in quanto $F(x)$ è continua e $F'(x)$ è continua a tratti.

Naturalmente si poteva estendere la funzione in modo pari e dire che il periodo (non minimo) era $2L$. Si sarebbe avuto $F(x) = \begin{cases} (ax+b)^2 + c & 0 \le x \le L \\ (-ax+b)^2 + c & -L \le x \le 0 \end{cases}$ e la periodica è $F(x - 2Lk)$ se $-L + 2kL \le x \le L + 2kL$. La serie di Fourier è $\sum_{k'=1}^{+\infty} \cos(x\frac{\pi k'}{L})q_{k'}$ dove $q_{k'} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx \cos(x\frac{k'\pi}{L})F(x) = \frac{2}{L}\int_0^L dx \cos(x\frac{k'\pi}{L})f(x)$

Bisogna far vedere che i due sviluppi sono uguali. Sia k' pari e quindi $k' = 2p$. $\frac{2}{L}\int_0^L dx \cos(x\frac{2p\pi}{L})f(x)$. La funzione $\cos(x\frac{2p\pi}{L})$ ha periodo $\frac{L}{p}$ e quindi l'integrale è $\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \cos(x\frac{2p\pi}{L})f(x)$ e per parità è $\frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} dx \cos(x\frac{2p\pi}{L})f(x)$

e tale integrale è uguale a $\frac{4}{L}\int_0^L dx \cos(x\frac{2k\pi}{L})f(x)$ non appena $k=p$.

Per i valori dispari di k' l'integrale $q_{k'} = \frac{2}{L}\int_0^L dx \cos(x\frac{k'\pi}{L})F(x)$ è zero in quanto $\cos\frac{\pi}{L}(2p+1)(\frac{L}{2}\pm\varepsilon)$ rimane costante in modulo ma cambia segno con il segno di ε.

Infatti i coefficienti di Fourier sono
$A: \frac{8(1+\cos\pi k')}{(k'\pi)^2}$ $B: \frac{32(1+\cos\pi k')}{(k'\pi)^2}$ $C: \frac{32(1+\cos\pi k')}{(k'\pi)^2}$ $D: \frac{8(1+\cos\pi k')}{(k'\pi)^2}$

Le serie convergono tutte uniformemente in quanto $F'(x)$ è continua a tratti.

Problema n.4

Scriviamo la funzione $F(x) = \begin{cases} x(L-x) & 0\le x\le L \\ x(L+x) & -L\le x\le 0\end{cases}$ e la periodica è $F(x-2Lk)$ se $-L+2kL\le x\le L+2kL$. $F(x)$, a seconda dei casi è $\varphi(x)$ resa dispari oppure $\psi(x)$ resa dispari e $F(x)|_{x\in[0,L]}=\varphi(x)$ oppure $F(x)|_{x\in[0,L]}=\psi(x)$

A: La soluzione è $u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sin\frac{\pi kx}{2}(A_k\cos c\frac{\pi kt}{2}+B_k\sin c\frac{\pi kt}{2})$. L'imposizione delle condizioni iniziali $u(x,0)=\varphi(x)$ e $u_t(x,0)=0$ dà $B_k=0$ e $A_k=\int_0^2 dx\sin\frac{\pi kx}{2}x(2-x)=\frac{16(1-\cos(k\pi))}{(\pi k)^3}$. La soluzione è quindi $u(x,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{2}\cos\frac{c\pi(2k+1)t}{2}\frac{32}{(\pi(2k+1))^3}$

B: La soluzione è $u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sin\frac{\pi kx}{3}(A_k\cos c\frac{\pi kt}{3}+B_k\sin c\frac{\pi kt}{3})$. L'imposizione delle condizioni iniziali $u(x,0)=0$ e $u_t(x,0)=\psi(x)$ dà $A_k=0$ e $B_k=\frac{3}{\pi kc}\frac{2}{3}\int_0^3 dx\sin\frac{\pi kx}{3}x(3-x)=\frac{72(1-\cos(k\pi))}{(\pi k)^3(c\pi k)}$. La soluzione è quindi $u(x,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{3}\cos\frac{c\pi(2k+1)t}{3}\frac{144}{(\pi(2k+1))^4c}$

C: La soluzione è $u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sin\pi kx(A_k\cos(c\pi kt)+B_k\sin(c\pi kt))$. L'imposizione delle condizioni iniziali $u(x,0)=\varphi(x)$ e $u_t(x,0)=0$ dà $B_k=0$ e $A_k=2\int_0^1 dx\sin(\pi kx)x(1-x)=\frac{4(1-\cos(k\pi))}{(\pi k)^3}$. La soluzione è quindi $u(x,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sin\pi(2k+1)x\cos c\pi(2k+1)t\frac{8}{(\pi(2k+1))^3}$

D: La soluzione è $u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sin\frac{\pi kx}{4}(A_k\cos c\frac{\pi kt}{4}+B_k\sin c\frac{\pi kt}{4})$. L'imposizione delle condizioni iniziali $u(x,0)=0$ e $u_t(x,0)=\psi(x)$ dà $A_k=0$ e $B_k=\frac{4}{\pi kc}\frac{1}{2}\int_0^4 dx\sin\frac{\pi kx}{4}x(4-x)=\frac{128(1-\cos(k\pi))}{(\pi k)^3(c\pi k)}$. La soluzione è quindi $u(x,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{4}\cos\frac{c\pi(2k+1)t}{4}\frac{256}{(\pi(2k+1))^4c}$

Problema n.5

Scriviamo la funzione $F(x) = \begin{cases} x(L-x) & 0\le x\le L \\ x(L+x) & -L\le x\le 0\end{cases}$ e la periodica è $F(x-Lk)$ se $-L+2kL\le x\le L+2kL$. $F(x)$ è $\varphi(x)$ resa dispari

A: La soluzione è $u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sin\frac{\pi kx}{2}A_k e^{-c\frac{\pi kt}{2}}$. L'imposizione delle condizioni iniziali $u(x,0)=\varphi(x)$ dà

$A_k = \int_0^2 dx \sin\frac{\pi k x}{2} x(2-x) = \frac{16(1-\cos(k\pi))}{(\pi k)^3}$. La soluzione è quindi $u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin\frac{\pi(2k+1)x}{2} e^{-\frac{c\pi(2k+1)t}{2}} \frac{32}{(\pi(2k+1))^3}$

B: La soluzione è $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi k x}{3} A_k e^{-c\frac{\pi k t}{3}}$. L'imposizione delle condizioni iniziali $u(x,0) = 0$ e $u_t(x,0) = \psi(x)$ dà $A_k = 0$ e $A_k = \frac{2}{3}\int_0^3 dx \sin\frac{\pi k x}{3} x(3-x) = \frac{72(1-\cos(k\pi))}{(\pi k)^3(c\pi k)}$. La soluzione è quindi $u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin\frac{\pi(2k+1)x}{3} e^{-\frac{c\pi(2k+1)t}{3}} \frac{144}{(\pi(2k+1))^4 c}$

C: La soluzione è $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin \pi k x (A_k e^{-c\pi k t}$. L'imposizione delle condizioni iniziali $u(x,0) = \varphi(x)$ e $u_t(x,0) = 0$ dà $B_k = 0$ e $A_k = 2\int_0^1 dx \sin(\pi k x) x(1-x) = \frac{4(1-\cos(k\pi))}{(\pi k)^3}$. La soluzione è quindi $u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin \pi(2k+1) x e^{-c\pi(2k+1)t} \frac{8}{(\pi(2k+1))^3}$

D: La soluzione è $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi k x}{4} A_k e^{-c\frac{\pi k t}{4}}$. L'imposizione delle condizioni iniziali $u(x,0) = 0$ e $u_t(x,0) = \psi(x)$ dà $A_k = 0$ e $A_k = \frac{1}{2}\int_0^4 dx \sin\frac{\pi k x}{4} x(4-x) = \frac{128(1-\cos(k\pi))}{(\pi k)^3(c\pi k)}$. La soluzione è quindi $u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin\frac{\pi(2k+1)x}{4} e^{-\frac{c\pi(2k+1)t}{4}} \frac{256}{(\pi(2k+1))^4 c}$